CONCOURS EXTERNE D'INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

1983 EPREUVE DE MATHEMATIQUES (1ère épreuve) (3 h)

1ère PARTIE

1°) Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$ que la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \neq 0, \quad f(t) = \frac{t^n . e^{xt}}{(e^t - 1)^n}, \; n \in \mathbb{N}$$

est développable en série entière de rayon de convergence non nul sous la forme :

$$(E) \quad \frac{t^n . e^{xt}}{(e^t - 1)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_k^{(n)}(x).$$

On dira que les $B_k^{(n)}(x)$ sont solutions de (E).

2°) Montrer que :

$$B_k^{(n)}(y+x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^j B_{k-j}^{(n)}(y)$$

Montrer que $B_k^{(n)}(x)$ est un polynôme et donner l'expression de ses coefficients en fonction des $B_k^{(n)}(0)$

3°) Donner les conditions de dérivabilité membre à membre de l'équation E vis à vis de t et de x.

2ème PARTIE

1°) Montrer que $\frac{d}{dx} B_k^{(n)}(x) = k B_{k-1}^{(n)}(x)$.

2°) On pose $\Delta B_k^{(n)}(x) = B_k^{(n)}(x+1) - B_k^{(n)}(x)$; montrer que :

$$\Delta B_k^{(n)}(x) = k B_{k-1}^{(n-1)}(x).$$

3°) Montrer qu'il existe une relation de récurrence entre trois polynômes solution de (E) de type :

$$B_k^{(n+1)}(x) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) B_k^{(n)}(x) + k\left(\frac{x}{n} - 1\right) B_{k-1}^{(n)}(x).$$

4°) Dans le cas particulier où $k = n \in \mathbb{N}$, calculer $\prod_{\ell=1}^{n} (x - \ell)$ en fonction des polynômes solutions de (E).

5°) Soit (x_m) une suite réelle telle que : $x_m = x_1 + (m-1)h$ avec $h > 0$ entier, $\forall m \in \mathbb{N}$, x_1 donné. On pose $\Phi_n(x) = \prod_{\ell=1}^{n} (x - x_\ell)$.

a. En utilisant le changement de variable $x = x_1 + hu$, écrire $\Phi_n(x)$ sous la forme d'un polynôme $\Psi_n(u)$ que l'on exprimera en fonction des polynômes solution de (E).

b. Déduire alors la valeur de l'intégrale :

$$I_n = \int_a^b \Phi_n(x)\, dx.$$

a et b étant deux réels donnés.

3ème PARTIE

On étudie le cas particulier : $n = 1$, $x = 0$ dans (E)

$$\frac{t}{(e^t - 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_k \quad \text{avec} \quad B_k^{(1)}(0) = B_k$$

1°) Calculer la somme de la série $\Omega(t) = \frac{t}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_k$.

2°) En déduire alors le développement en série entière de la fonction

$$g(t) = t \coth t$$